

Abstract

Context-free languages are used in a wide field of computer science. For larger inputs even small improvements in the running time (such as logarithmic factors) can give a large benefit. In this Bachelor Thesis we take a close look on PDA Emptiness and Context-Free Reachability (CFR). We show these two problems can be reduced to each other and have the same computational complexity. To capture the essence of this computational hardness, we proof each CFR instance with a fixed grammar can be transformed into a CFR instance with the Dyck-2 language. While we show Dyck-2 reachability is **P**-complete, we proof the easier Dyck-1 reachability is **NL**-complete. We present a conditional lower bound making sub quadratic algorithms for PDA Emptiness and CFR on DAGs very unlikely. This lower bound is based on the Strong Exponential Time Hypothesis. In addition we show a reduction from k -CLIQUE to PDA Emptiness and therefore CFR on DAGs. As the main result we improve the running time of CFR on DAGs first to $\mathcal{O}(n^3/\log^2 n)$ and later to $\mathcal{O}(n^\omega)$, whereby ω is the matrix multiplication coefficient.

Zusammenfassung

Kontextfreie Sprachen werden in vielen Bereichen der Informatik eingesetzt. Somit ergeben sich durch kleine Laufzeitverbesserungen (z.B. logarithmische Faktoren) oft schon große Verbesserungen. In dieser Bachelorarbeit werden wir uns hauptsächlich mit der „Leerheit von Kellerautomaten“ (PDA Emptiness) und „Kontextfreier Erreichbarkeit“ (CFR) beschäftigen. Wir reduzieren beide Probleme aufeinander und folgern somit, dass sie die gleiche Komplexität besitzen. Wir beweisen, dass jedes CFR Problem mit einer fixen Grammatik auf Dyck-2 Erreichbarkeit (D2R) reduzierbar ist. Dieses Problem bildet somit einen kanonischen Vertreter für die Komplexität von CFR. Während wir zeigen, dass D2R **P**-vollständig ist, werden wir beweisen, dass die einfachere Dyck-1 Erreichbarkeit **NL**-vollständig ist. Neben einer Reduktion von k -CLIQUE auf PDA Emptiness, mit der wir die Laufzeit des k -CLIQUE Algorithmus verbessern können, geben wir eine quadratische bedingte untere Schranke an, die auf der Strengen Exponentiellen Zeit Hypothese basiert. Als zentrale Ergebniss zeigen wir, dass CFR auf gerichteten azyklischen Graphen mit einem $\mathcal{O}(n^3/\log^2 n)$ Algorithmus bzw. sogar mit einem $\mathcal{O}(n^\omega)$ Algorithmus gelöst werden kann, wobei ω für den Matrix Multiplikations-Koeffizienten steht.